第五章　《张丘建算经》和《孙子算经》

魏晋时，古代数学进入理论奠基的新时期。刘徽的《九章算术注》和赵爽的《周髀算经注》总结了古代数学的辉煌成就。魏晋南北朝还有《孙子算经》和《张丘建算经》等算学著作问世。

§5.1　《张丘建算经》和百鸡问题

张丘建，北魏时清河(今山东临清一带)人，生平不详。著有《张丘建算经》三卷，据钱宝琮考，约成书于北魏献文帝期间(公元466～485)。

《张丘建算经》全书现存92题，其中的突出贡献是有了求最小公倍数的方法，创造了计算等差级数各元素的公式。张丘建把等差数列的研究向前进了一步，其中的等差数列问题更为复杂，解法也更加丰富多彩。

如《张丘建算经》卷上第22题为：

今有女善织，日益功疾。初日织五尺，今一月织九匹三丈。问日益几何？”术文是：

“置今织尺数，以一月日而一，所得，倍之。又倍初日尺数，减之，余为实。以一月日数，初一日减之为法，实如法而一。

令“今织尺数”为S_n，“一月日数　”为 n，“初日尺数”为a_1，“日益数”为 d，则有$d=\dfrac{2\dfrac{S_n}{n}-2a_1}{n-1}$。

《张丘建算经》卷上第23题为：

今有女不善织，日减功迟。初日织五尺，末日织一尺，今三十日织讫。问织几何？”术文是：“并初，末织尺数，半之。余以乘织讫日数，即得。”也就是$S_n=\dfrac{a_n-a_1}{2}\cdot n$。

《张丘建算经》卷下第36题为：

今有人举取他绢，重作券，要过限一日息绢一尺，二日息二尺，如是息绢日多一尺，今过限一百日。问息绢几何？术文是：“并一百日，一日息，以乘百日而半之，即得。”

此题是上题的特例，首项公差别皆为1，术文相当于给出前n项自然数的公式：

$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$。

《张丘建算经》卷下最后一问是百鸡问题为著名的不定方程问题，影响极大。

今有鸡翁一直钱五，鸡母一直钱三，鸡雏三直钱一，凡百钱买鸡百只，问鸡翁、母、雏各几何？

设鸡翁、鸡母、鸡雏各为 x，y，z，则可以列出方程（组）：

$$\begin{cases} x+y+z=100 & (1) \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 & (2) \end{cases}$$

《张丘建算经》认识到这是一个不定问题，并给出了(4，18，78)，(8，11，81)，(12，4，84)三组解，是其全部正整数解。《张丘建算经》提示了解法：

术曰：鸡翁每增四，鸡母每减七，鸡雏每益三，即得。

这个提示太简括，其具体好法后人有若干猜测。数学史家钱宝琮先生的理解是：以 3 乘第(2)式，减第(1)式，化成 7 x +4y=100，其中 4y 与 100 都是 4 的倍数，因此 x 应是 4 的倍数：

$$\begin{cases} x=4t \\ y=25-7t \\ z=75+3t \end{cases}$$

令 t=1，2，3，则 x =4，8，12， y=18，11，4，z=78，81，84。因为正数解，故 x 不能为 0 或负数，也不能大于 12，只能有以上三组解：

$$\begin{cases} x=4 \\ y=18 \\ z=78 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=8 \\ y=11 \\ z=81 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=12 \\ y=4 \\ z=84 \end{cases}$$

后来人们一直未找到鸡问题的一般解法。直到 19 世纪中叶，宋元数学复兴之后，骆腾凤《艺游录》、时曰醇《百鸡术衍》用大衍求一术求解，才找到一般解法。

“百鸡术”是世界著名的不定方程问题。“百鸡问题”对阿拉伯、欧洲数学产生了巨大影响。13 世纪意大利斐波那契的《算法之书》，15 世纪阿拉伯的阿尔·卡西的《算术之钥》均出现有相同的问题“百鸡问题”，显然源于中国。

§5.2　《孙子算经》

《孙子算经》3 卷，人们常常把它误认为春秋时期军事家孙武的著作，实际上它是公元 400 年前后的作品，作者不详。此书是一本初级数学读物。卷上列出了筹算记数制度及筹算乘除法则，有中国历史上第一次关于度量衡的全面记载，此外还有大数记法、某些物品的比重表、九九乘法表、平方表等预备知识。卷中、卷下共 64 个应用问题，都是分数四则、比例算法、面积和体积、盈不足、开平方、线性方程组解法等，有 9 个题目取自《九章算术》。此书中“河上荡杯”、“鸡兔同笼”等题后来在民间得到了广泛流传，特别是“物不知数”问题开一次同余式解法之先河。不少数学名题，表现出独特的程序化解法和技巧。

一、“物不知数”问题和中国剩余定理

《孙子算经》卷下第 26 问即是著名的“物不知数”问题。

今有物，不知其数。三、三数之，剩二；五、五数之，剩三；七、七数之，剩二。问物几何?

答曰：二十三。

这是一个相当于解同余式组的问题。设 N 为所求之物数，问题的现代形式为

$N \equiv 2 \pmod{3} \equiv 3 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{7}$，

亦即求适合于上式的最小正整数 N。

书中给出一般解法：

凡三、三数之，剩一，则置七十；五、五数之，剩一，则置二十一；七、七数之，剩一，则置十五。一百六以上，以一百五减之，即得。

如令各余数分别为 r_1，r_2，r_3，

则有

$N=70 r_1+21 r_2+15r_3-105p$

其中 p 为正整数。

关于“孙子问题”的一般情形，用现代同余式理论来解释如下：

对于同余式组：

$N \equiv r_1 \pmod{3}$　（$0 \leqslant r_1 < 3$）

$N \equiv r_2 \pmod{5}$　（$0 \leqslant r_2 < 5$）

$N \equiv r_3 \pmod{7}$　（$0 \leqslant r_3 < 7$），

更为一般地，如果因数 2，1，1 分别为 k_1，k_2，k_3，模 3，5，7 分别为 a_1，a_2，a_3，则以上的孙子问题解法可进一步推广为：

如果同余式组

$N \equiv r_1 \pmod{a_1}$　（$0 \leqslant r_1 < a_1$）

$N \equiv r_2 \pmod{a_2}$　（$0 \leqslant r_2 < a_2$）

$N \equiv r_3 \pmod{a_3}$　（$0 \leqslant r_3 < a_3$），

由于模 a_1，a_2，a_3，两两互素，即 $(a_1, a_2)=(a_2, a_3)=(a_1, a_3)=1$，如果能找到整数 k_1，k_2，k_3，使得，下面三式成立：

$$k_1 \frac{m}{a_1} \equiv 1 \pmod{a_1}$$

$$k_2 \frac{m}{a_2} \equiv 1 \pmod{a_2}$$

$$k_3 \frac{m}{a_3} \equiv 1 \pmod{a_3}$$

这里 $m= a_1a_2a_3$，则

$$N= r_1k_1 \frac{m}{a_1} + r_2 k_2 \frac{m}{a_2} + r_3k_3 \frac{m}{a_3} - p\, a_1 a_2 a_3$$

问题的关键是求出 k_i ，使

$$k_i \cdot \frac{m}{r_i} \equiv 1 \pmod{a_i}$$

其中 $i=1，2，3$。这一步是书中明确给出的，但是如何求 k_i 却未提到。大约到了 13 世纪，才由数学家秦九韶给予解决。

二、“雉兔同笼”问题

《孙子算经》卷下第 31 问记述着著名的“雉兔同笼”（现通称“鸡兔同笼”）问题：

“雉兔同笼”问

【原文】今有雉兔同笼，上有三十五头 ，下有九十四足。问雉兔各几何?

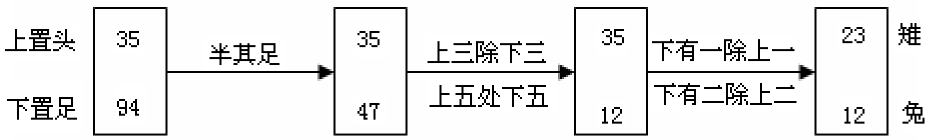
答曰：雉二十三；兔一十二。

术曰：上置三十五头，下置九十四足。半其足，得四十七。以少减多，再命之。上三除下三，上五除下五。下有一除上一，下有二除上二，即得。

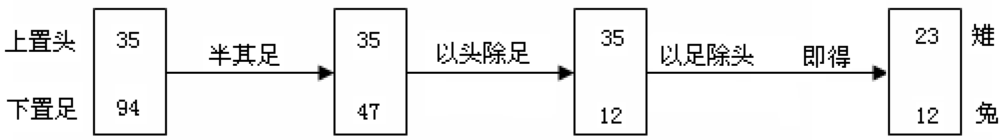
又术曰：上置头，下置足。半其足。以头除足，以足除头，即得。

《孙子算经》给出的解决这个问题的方法，具有典型的机械化程序的操作特点。以上“术曰”和“又术曰”就是对“答曰：雉二十三；兔一十二”的解释和算法过程的展示。其中，“又术曰”又是对“术曰”的算法的进一步简化和浓缩。

依据“术曰”文，问题解决程序过程表示如下（用现代数字代替算筹符号）：



根据“又术曰”文：



以上解法十分奇妙，通过布列筹式方阵，然后规定一套机械化的算法，一步步达到解决数学问题的目的，整个程序过程显得简明而富有创造性，这是我国传统数学的突出特点，对我们今天的数学教育注重问题解决的教学具有重要的启示意义。

三、“三女会合”问题

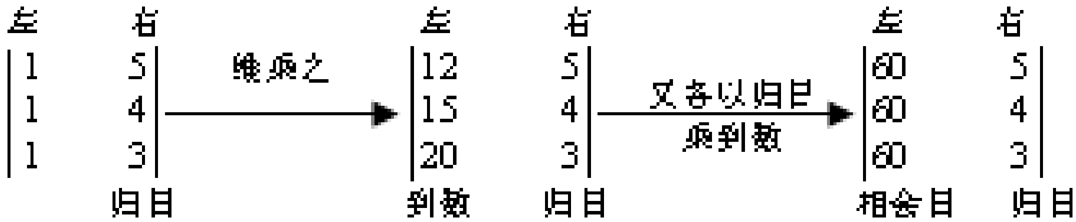
《孙子算经》中关于求最小公倍数的程序，卷下第 35 问为“三女会合”，实为一道求最小公倍数的问题：

今有三女，长女五日一归，中女四日一归，少女三日一归。问三女几何日相会?

答曰：六十日。

术曰：置长女五日、中女四日、少女三日于右方。各列一算于左方。维乘之，各得所到数。长女十二到，中女十五到，少女二十到。又各以归日乘到数即得。

其解法本来相当简单，可是书中用筹算计算具有特点。
布算如下：



依据上面的程序过程，可以体会到筹算求最小公倍数的具体作法。如果用现代形式表示，就是

先计算三女的回归次数：

$3\times4=12$ ， $3\times5=15$， $4\times5=20$。

再与各自归日对应相乘：

$12\times5=15\times4=20\times3=60$

这种算法与现在的求法基本一致。由于本题 5，4，3 三数两两互素，故程序比较简单。